Suhl—Kondo 理論についての Comment

東大理　川村　清

（2月15日受理）

§1. 問題点

Classical spin limit という言葉は今の場合，SJ → finite 且つ S → ∞ の極限を意味する。その時，Suhl の方程式[1] は次のようになる。

$$t(z) = \int_L \rho(x)(z-x)^{-1}\left[|t_+(x)|^2 + 4S(s+1)|\tau_+(x)|^2\right]dx \quad (1a)$$

$$\tau(z) = -\frac{J}{2} + \int_L \rho(x)(z-x)^{-1}\left[t_+(x)\tau_-(x) + t_-(x)\tau_+(x)\right]dx \quad (1b)$$

ここで $t_\pm(x) = t(x \pm i\delta)$ etc. である。この方程式は簡単に解けてよく知られた次の解を与える。[2]

$$t(z) = J^2 S(s+1)F(z)\left[1 - J^2\{F(z)\}^2\right]^{-1} \quad (2a)$$

$$\tau(z) = -(J/2)\left[1 - J^2\{F(z)\}^2\right]^{-1} \quad (2b)$$

ここで

$$F(z) = \int_L \rho(x)(z-x)^{-1}dx \quad (3)$$

一方，Suhl 及び Kondo は（1b）より次の式を求めた[1),3)]

$$|\tau_+(x)|^2 = (J/4)^2\left[1+b\right]^{-1}$$

$$b = (2\pi J\rho(x))^2 S(s+1) \quad (4)$$

（3）で

$$F(x+i\delta) \cong -\pi i \rho(x) \quad (5)$$

としても（2b）は

$$|\tau_+(x)|^2 = (J/4)^2[1+(b/4)]^{-2} \tag{6}$$

となり（4）とは一致しない。その原因は，どこにあるのかを考えてみる。

§2. Hilbert 問題への移行と問題点

Kondo は（1b）から

$$\mathscr{I}_m\, \tau_+(x) = -\pi\rho(x)[t_+(x)\tau_-(x) + t_-(x)\tau_+(x)] \tag{7}$$

を作り，両辺を $|\tau|^2$ で割った。次に，非常に重要な仮定として，$\rho(z)$ という関数が次式の性質をもつと仮定する。

$$\rho(x+i\delta) = -\rho(x-i\delta) = \rho(x) \quad \text{on } L \tag{8}$$

そうすると

$$X(z) = -(J/2)[1-2\pi i J\rho(z)t(z)]/\tau(z) \tag{9}$$

で定義される $X(z)$ は，L の上で

$$X_+(x) - X_-(x) = 0 \tag{10}$$

を満す。一方 L が有限の長さなら，（1a），（1b）から

$$\lim_{z\to\infty} t(z) = o(z^{-1}) \quad \lim_{z\to\infty} \tau(z) = -(J/2)$$

そこで

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = 1 \tag{11}$$

（10）と（11）を満し，z に関して L 以外で "holomolphic" な解を求めよというのが Hilbert problem でその解は

$$X(z) \equiv 1 \tag{12}$$

で与えられる。[4] 一方，本当の解の（2a），（2b）を（9）に代入すると本当の $X(z)$ は次のようになる。

$$X(z) = 1 - J^2 S(s+1)\left\{\int_L \rho(x)(z-x)^{-1}dx\right\}^2$$
$$- 2\pi i\rho(z) J^2 S(s+1)\int_L \rho(x)(z-x)^{-1}dx \qquad (13)$$

Hilbert problem が unique であることから (13) の第2，3 項の寄与は恒等的に消えるはずだが，それは $\rho(z) \equiv 0$ を意味する。このことから，Hilbert problem を作り，それが解ける為には，$\rho(z)$ にきびしい条件が必要で，そのような関数は，実は存在しないことが判る。

§ 3. $\rho(z)$ のいくつかの例についての検討

まず (1a)，(1b) の積分が収束するためには，$\rho(x)$ が遠方で減少するか，あるいは積分領域が有限であることが必要である。後者の方が条件がゆるいので，いまは積分が $x=-D$ から $x=D$ までの積分だとする。physical にもこの場合の方が reasonable である。そこで (8) をみたす $\rho(z)$ として，次の形が頭にうかぶ。

$$\rho_1(z) = \rho_0\sqrt{(D-z)(D+z)} \qquad (14)$$

$$\rho_2(z) = \rho_0 / \sqrt{(D-z)(D+z)} \qquad (15)$$

まず $\rho_1(z)$ は，$z\to\infty$ で $i\rho_0 z$ に近づくが，これでは，(9) から

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = 1 + 2\pi J\rho_0 z \lim_{z\to\infty} t(z) \qquad (16)$$

これから $z\to\infty$ での $X(z)$ の漸近形は $t(z)$ についての形が判らなくてはならないから，Hilbert problem にならない。$\rho_2(z)$ を使うと (3) の $F(z)$ は $z=D$ で $1/\sqrt{D-x}$ で発散する。$\rho_2(z)$ も同じように発散するから，本当の $X(z)$ は (13) で判るように

$$X(z \cong D) \sim (D-x)^{-1}$$

の pole をもつ。このことから求める $X(z)$ は "sectionary holomorphic" ではなく，したがって Hilbert problem の解ではない。いいかえれば求める $X(z)$ は，Hilbert problem のザルの網目からおちてしまうので

ある。

（14），（15）の他に $\sqrt{(D-z)/(D+z)}$ も考えられるが，$\rho_2(z)$ と同じ理由でHilbert problemを構成しない。

§4. 結　　論

われわれは，Suhl－Kondoの解がclassical limitでは，正しくないことを示し，その理由を考えた。われわれのみたところでは，Suhl－KondoがHilbert問題を解くのに使ったような都合のよい $\rho(z)$ は存在しないことを示した。実際，$-D \leqq x \leqq D$ でのみcutをもち，（8）をみたすような $\rho(z)$ をいくつか検討してみると，どれもHilbert問題を構成しない。実は，Zittarz[5]の解もclassical limitで正しくないが，やはりHilbert問題を構成しないからである。

それではSuhl's equationの厳密解は何かということであるが，それがSuhl，Kondo及びZittarzの求めたものに非常に近いのか，あるいはとんでもなく異なるのかは勿論判らない。したがって，（4）のbをclassical limitに合わせただけでは信用出来ない。

Quantum limit及びclassical limitでのみ正しい解として，

$$t(z) = J^2S(s+1)\left[\int dx\,\rho(x)(z-x)^{-1}|X_+(x)|^{-2}\right]$$

$$\times\left[1-S(s+1)F(z)\int dx\,\rho(x)(z-x)^{-1}|X_+(x)|^{-2}\right]^{-1}$$

$$\tau(z) = -(J/2)X(z)\left[1-S(s+1)F(z)\int dx\,\rho(x)(z-x)^{-1}|X_+(x)|^{-2}\right]^{-1}$$

が考えられる。[6] ここで

$$X(z) = 1-J\int\rho(x)(z-x)^{-1}\ \mathrm{th}\ (x/2T)\,dx$$

この表は（2a）は満すが（2b）は満たさない。

謝　　辞

中嶋・鈴木両先生の他，何人かの方に議論していただいたことを感謝します。

文　献

1)　H. Suhl, Phys. Rev. 141 (1966), 483.
2)　H. Shiba, Prog. Theor. Phys.
3)　J. Kondo, Prog. Theor. Phys. 40 (1968), 695.
4)　N. I. Muskhelishvili, Singular Integral Equations (P. Noordhoff Ltd., Groningen, The Netherlands, 1953) ch. 10.
5)　J. Zittarz, Zeit. Physik. 217 (1968), 43.
6)　川村　清，物性研究 10 (1968), 282.

〔追　記〕

上で Zittarz[5)] の解が classical limit で正しくないように書いたが，それは，筆者の誤解であった。classical limit での，Suhl[1)]，Kondo[3)]，Zittarz[5)] の表式は次のようになる。まず Suhl は，

$$|\tau|^2 = |F|^2 / (1 + a|F|^2) \tag{A・1}$$

F(z) の表式の中の $(t_u/V) = 1$ とし，$\tanh\frac{\beta x}{2}$ の項を無視すると

$$\begin{cases} F(z) = \text{constant} = C^{-1} \\ C = (4/J^2 - a)^{1/2} \end{cases}$$

だから，(A・1) から

$$|\tau|^2_{\mathrm{cl.}} = \left(\frac{J}{4}\right)^2 \tag{A・2}$$

Kondo は

$$|\tau|^2_{\mathrm{cl.}} = (J/4)^2 [1 + (2\pi J\rho)^2 S(s+1)]^{-1} \tag{A・3}$$

Zittarz[5)] の場合は

$$|\tau|^{-2} = |Y(\omega)|^2 + (2\pi J\rho)^2 S(s+1) \qquad (A \cdot 4)$$

ここでYは，任意な関数 f(z) を含んでいて classical limit で

$$Y(z) = 1 + f(z) \qquad (A \cdot 5)$$

彼の notation では，

$$f(z) = - S(s+1)\, F_r(z)\, F_a(z)$$

であるが，これは explicit に書けば

$$f(z) = - 2\pi i J^2 S(s+1)\,\rho(z) \int \frac{dx}{z-x}\,\rho(x)$$
$$- J^2 S(s+1) \left\{ \int \frac{\rho(x)\,dx}{z-x} \right\}^2 \qquad (A \cdot 6)$$

となり，Y(z) は (13) の X(z) に一致する。Zittarz は f(z) を Nagaoka 方程式と Suhl 方程式の比較から決めた。f(z) は $\rho(z)$ を彼流に一般化しても，依然厳密な意味での Hilbert 問題にならず，したがって一意的に解けないことから出て来た。Kondo 流にやって，$\rho(z)$ として (15) を仮定し，そのかわり Hilbert 問題は一意的に解かず

$$X(z) = 1 + f(z)$$

としておいて，f(z) が $z = \pm D$ に pole をもち，$z \to \infty$ で消えるという条件から求められればそれでもよい。Classical limit で正しいように f(z) を選べば (A・6) となる。このやり方は，しかし，厳密にというと正しくなく，結局 Zittarz のように Nagaoka 方程式にもどることになろう。